SKALARNI PROIZVOD VEKTORA

Definicija 1. Skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a}\cdot\vec{b}$, je realan broj $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$, gdje je φ ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Teorema 1. Svojstva skalarnog proizvoda su:

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (zakon komutativnosti);
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (zakon distributivnosti);
- $(k\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\cdot\vec{b})=k\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}),\quad k\in R$;
- $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$;
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}=\vec{0}\quad\vee\quad\vec{b}=\vec{0}\quad\vee\quad\varphi=90^\circ$ (tj. vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su ortogonalni).

Primijetimo da za vektore ortonormirane baze $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ važi:

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Teorema 2. U ortonormiranoj bazi $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ za vektore $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ i $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ važi:

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$;
- $\cos\varphi=\dfrac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$, φ je ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$;
- ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ međusobno ortogonalni ($\vec{a}\perp\vec{b}$) tj. $\varphi=90^\circ$ tada je $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2=0$.

Primjer 1. Neka je $|\vec{a}|=4,\quad |\vec{b}|=3,\quad \varphi=\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$. Izračunati:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; **b)** $|\vec{a}-\vec{b}|$; **c)** $|3\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}|$; **d)** $(3\cdot\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-4\cdot\vec{a})$.

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=4\cdot 3\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=4\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2}=6$;

b) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=$

$=|\vec{a}|^2-2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16-12+9=13\quad\Rightarrow\quad|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$;

c) $|3\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}|^2=(3\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b})\cdot(3\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b})=$

$=9\cdot\vec{a}\cdot\vec{a}+6\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+6\cdot\vec{b}\cdot\vec{a}+4\cdot\vec{b}\cdot\vec{b}=9\cdot|\vec{a}|^2+12\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+4\cdot|\vec{b}|^2=$

$=9\cdot 16+12\cdot 6+4\cdot 9=252\quad\Rightarrow\quad|3\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}|=\sqrt{252}$;

d)
$$(3\cdot\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-4\cdot\vec{a})=3\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}-12\cdot\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}-4\cdot\vec{b}\cdot\vec{a}=$$
$$=-\vec{a}\cdot\vec{b}-12\cdot\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2=-189.$$

Primjer 2. Izračunati skalarni proizvod vektora $\vec{a}=(3,1,-5)$ i $\vec{b}=(2,4,3)$.
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 2+1\cdot 4+(-5)\cdot 3=-5$.

Primjer 3. Izračunati ugao između vektora $\vec{a}=(3,-4,1)$ i $\vec{b}=(1,4,3)$.

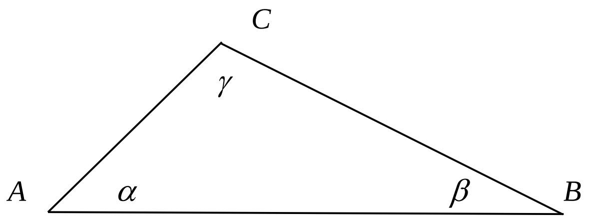
$$\cos\varphi=\frac{3\cdot 1+(-4)\cdot 4+1\cdot 3}{\sqrt{3^2+(-4)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+4^2+3^2}}=-\frac{10}{26}=-\frac{5}{13}\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad\varphi=\arccos(-\frac{5}{13}).$$

Primjer 4. Naći vrijednost parametra *m* za koji su vektori $\vec{a}=(m,-3,2)$ i $\vec{b}=(m-4,m,3)$ ortogonalni.

$$\vec{a}\perp\vec{b}\quad\Rightarrow\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=0\quad\Rightarrow\quad m\cdot(m-4)+(-3)\cdot m+2\cdot 3=0\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow m^2-7\cdot m+6=0\quad\Rightarrow\quad m=1\vee m=6.$$

Primjer 5. Dati su vektori $\vec{a}=(2,1,-2)$, $\vec{b}=(-1,3,1)$ i $\vec{c}=(3,1,4)$. Naći vektor $\vec{x}$ koji zadovoljava uslove $\vec{a}\cdot\vec{x}=-2$, $\vec{b}\cdot\vec{x}=8$, $\vec{c}\cdot\vec{x}=17$.
Neka je $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$. Iz uslova dobijamo:
$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\cdot\vec{x}=-2\\ \vec{b}\cdot\vec{x}=8\\ \vec{c}\cdot\vec{x}=17\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2\cdot x_1+1\cdot x_2+(-2)\cdot x_3=-2\\ (-1)\cdot x_1+3\cdot x_2+1\cdot x_3=8\\ 3\cdot x_1+1\cdot x_2+4\cdot x_3=17\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2\cdot x_1+x_2-2\cdot x_3=-2\\ -x_1+3\cdot x_2+x_3=8\\ 3\cdot x_1+x_2+4\cdot x\ \ =17\end{array}\right..$$
Rješavajući prethodni sistem dobijamo da je $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ tj. $\vec{x}=(1,2,3)$.

Primjer 6. Data su tjemena trougla *ABC*: *A(-1,-2,4), B(-4,-2,0)* i *C(3,-2,1)*. Izračunati dužine stranica i uglove trougla.



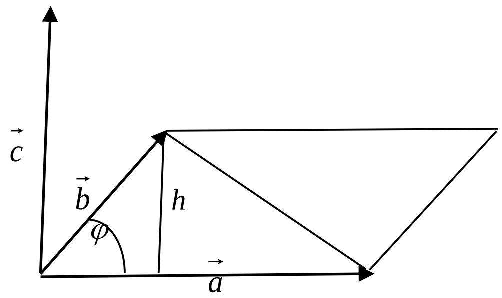
Iz koordinata tjemena trougla *ABC* slijedi da je:

$$\overrightarrow{AB}=(-3,0,-4),\quad \overrightarrow{BC}=(7,0,1),\quad \overrightarrow{AC}=(4,0,-3)\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \left|\overrightarrow{AB}\right|=5,\quad \left|\overrightarrow{BC}\right|=5\sqrt{2},\quad \left|\overrightarrow{AC}\right|=5;$$
$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{(-3)\cdot4+0\cdot0+(-4)\cdot(-3)}{5\cdot5}=0\quad\Rightarrow\quad\alpha=90^\circ;$$
$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{3\cdot7+0\cdot0+4\cdot1}{5\cdot5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad\beta=45^\circ;$$
$$\cos\gamma=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|}=\frac{(-4)\cdot(-7)+0\cdot0+3\cdot(-1)}{5\cdot5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad\gamma=45^\circ.$$

VEKTORSKI PROIZVOD VEKTORA

Definicija 1. Vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$, u oznaci $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$, čiji je:

- intenzitet brojno jednak površini paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tj. $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$, gdje je φ ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$;
- pravac normalan na ravan određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (tj. $\vec{c}\perp\vec{a}\quad\wedge\quad\vec{c}\perp\vec{b}$);
- smjer takav da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ obrazuju desni triedar (tj. vektor $\vec{c}$ je usmjeren na onu stranu ravni koju određuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ odakle se najkraća rotacija vektora $\vec{a}$, da bi se poklopio sa pravcem i smjerom vektora $\vec{b}$, vidi kao kretanje obrnuto u smjeru kretanja kazaljke na satu).



Sa slike i iz prethodne definicije dolazimo do sljedećih formula:

$$\sin\varphi=\frac{h}{\left|\vec{b}\right|}\quad\Rightarrow\quad h=\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$$
$$P_{paralelograma}=\left|\vec{a}\right|\cdot h=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$$
;
$$P_{paralelograma}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi;$$
$$P_{trougla}=\frac{1}{2}\cdot P_{paralelograma}=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$$

Teorema 1. Svojstva vektorskog proizvoda su:

- $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;
- $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;
- $k\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=(k\cdot\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(k\cdot\vec{b}),\quad k\in R$;

- $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}=\vec{0} \quad \vee \quad \vec{b}=\vec{0} \quad \vee \quad \vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni vektori.

Primijetimo da za vektore ortonormirane baze $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ važi:

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Teorema 2. U ortonormiranoj bazi $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ za vektore $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ i $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ važi:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}.$$

Primjer 1. Ako je $|\vec{a}|=3,\quad |\vec{b}|=4,\quad \varphi=\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{6}$. Izračunati:

a) $|\vec{a}\times\vec{b}|$; **b)** $|(3\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b})\times(2\cdot\vec{a}-3\cdot\vec{b})|$.

a) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi=3\cdot 4\cdot\sin\frac{\pi}{6}=6;$

b)

$$|(3\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b})\times(2\cdot\vec{a}-3\cdot\vec{b})|=|6\cdot\vec{a}\times\vec{a}-9\cdot\vec{a}\times\vec{b}+4\cdot\vec{b}\times\vec{a}-6\cdot\vec{b}\times\vec{b}|=$$

$$=|-9\cdot\vec{a}\times\vec{b}-4\cdot\vec{a}\times\vec{b}|=|-13\cdot\vec{a}\times\vec{b}|=13\cdot|\vec{a}\times\vec{b}|=13\cdot 6=78.$$

Primjer 2. Ako je $|\vec{a}|=3,\quad |\vec{b}|=20,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=30$. Izračunati $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Iz uslova

$\vec{a}\cdot\vec{b}=30 \quad\Rightarrow |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=30 \quad\Rightarrow \cos\varphi=\frac{30}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{30}{3\cdot 20}=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow \varphi=60^\circ$, gdje je φ ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi=3\cdot 20\cdot\sin 60^\circ=3\cdot 20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=30\cdot\sqrt{3}.$$

Primjer 3. Dati su vektori $\vec{a}=(2,3,-2),\quad \vec{b}=(3,1,2)$. Izračunati:

a) $\vec{a}\times\vec{b}$; **b)** $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$;

a) $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -2\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -2\\ 3 & 2\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=.$$

$$=8\cdot\vec{i}+(-10)\cdot\vec{j}+(-7)\cdot\vec{k}=(8,-10,-7)$$

b) $$\begin{aligned}&(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}=-2\cdot\vec{a}\times\vec{b}=\\&=-2\cdot(8,-10,-7)=(-16,20,14)\end{aligned}.$$

Primjer 4. Naći vektor $\vec{c}$ koji je normalan na vektore $\vec{a}=(1,1,-1)$ i $\vec{b}=(-5,1,1)$, čiji je intenzitet jednak $\sqrt{14}$.

Vektor $\vec{c}$ je normalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, pa zaključujemo da je on kolinearan sa vektorom $\vec{a}\times\vec{b}$. Dakle,

$$\vec{c}=k\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=k\cdot\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&-1\\-5&1&1\end{vmatrix}=k\cdot(2,4,6)=(2\cdot k,4\cdot k,6\cdot k).$$ Kako je

$$|\vec{c}|=\sqrt{14}\quad\Rightarrow\quad\sqrt{(2k)^2+(4k)^2+(6k)^2}=\sqrt{14}\quad\Rightarrow\sqrt{56k^2}=\sqrt{14}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{1/2}=\pm\frac{1}{2}$$

Za traženi vektor $\vec{c}$ dobijamo dva rješenja i to: $\vec{c}=(1,2,3)\quad\vee\quad\vec{c}=(-1,-2,-3)$.

Primjer 5. Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}=(8,1,4)$ i $\vec{b}=(-3,2,1)$.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\8&1&4\\-3&2&1\end{vmatrix}=(-7,-20,19),$$

$$P=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(-7)^2+(-20)^2+19^2}=\sqrt{810}=9\sqrt{10}.$$

Primjer 6. Naći površinu trougla čija su tjemena *A(2,-1,1)*, *B(4,-2,3)*, *C(1,2,-1)* i dužinu visine spuštene iz tjemena *C*.

$$\overrightarrow{AB}=(2,-1,2),\ \overrightarrow{AC}=(-1,3,-2),$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-1&2\\-1&3&-2\end{vmatrix}=(-4,2,5),\qquad|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$$

$$P_\Delta=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+2^2+5^2}=\frac{1}{2}\sqrt{45}=\frac{3}{2}\sqrt{5},$$

$$P_\Delta=\frac{|\overrightarrow{AB}|\cdot h_c}{2}\Rightarrow h_c=\frac{2P_\Delta}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{2\cdot\frac{3}{2}\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}.$$

Primjer 7. Izračunati vrijednosti parametara *m* i *n* za koje su vektori $\vec{a}=(m,1,-1)$ i $\vec{b}=(2,2n,3)$ kolinearni.

Vektori $\vec{a}=(m,1,-1)$ i $\vec{b}=(2,2n,3)$ su kolinearni vektori pa je njihov vektorski proizvod jednak nula-vektoru.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m & 1 & -1 \\ 2 & 2n & 3 \end{vmatrix}=\vec{0} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3+2n,-3m-2,2mn-2)=(0,0,0) \quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3+2n=0 \\ -3m-2=0 \\ 2mn-2=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad m=-\frac{2}{3},\quad n=-\frac{3}{2}.$$

MJEŠOVITI PROIZVOD VEKTORA

Definicija 1. Mješoviti proizvod vektora $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$, u oznaci $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, je realan broj.

Teorema 1. Svojstva mješovitog proizvoda vektora su:

- $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$;
- $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$;
- $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}=-(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$;
- $k\cdot((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c})=(k\cdot(\vec{a}\times\vec{b}))\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(k\cdot\vec{c}), \qquad k\in R$;
- $((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c})\cdot\vec{d}=(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{d}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{d}$;
- $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni vektori.

Teorema2. U ortonormiranoj bazi $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ za vektore $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ i $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$ važi:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Teorema 3.

- Zapremina paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ računa se po formuli: $V_{paralelopipeda}=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$;
- Zapremina tetraedra konstruisanog nad vektorima $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ računa se po formuli: $V_{tetraedra}=\frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$.

Primjer 1. Izračunati mješoviti proizvod vektora $\vec{a}=(1,2,-1), \vec{b}=(2,-1,3)$ i $\vec{c}=(2,1,4)$.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-15.$$

Primjer 2. Ispitati da li su vektori $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni, ako je:

a) $\vec{a}=(1,2,3), \quad \vec{b}=(-1,3,2), \quad \vec{c}=(-2,3,4)$;

b) $\vec{a}=(-2,1,3), \quad \vec{b}=(2,4,1), \quad \vec{c}=(-2,6,7)$.

a) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 2\\ -2 & 3 & 4\end{vmatrix}=15\neq 0 \quad \Rightarrow$ vektori $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ nijesu komplanarni.

b) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ -2 & 6 & 7\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow$ vektori $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni.

Primjer 3. Ispitati da li tačke *A(1,3,4), B(2,3,1), C(-3,1,0)* i *D(1,1,1)* pripadaju jednoj ravni.
Treba ispitati da li su vektori $\overrightarrow{AB}=(1,0,-3), \quad \overrightarrow{AC}=(-4,-2,-4)$ i $\overrightarrow{AD}=(0,-2,-3)$ komplanarni.

Kako je $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}1 & 0 & -3\\ -4 & -2 & -4\\ 0 & -2 & -3\end{vmatrix}=-26\neq 0$, to vektori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ nijesu komplanarni, pa date tačke ne pripadaju istoj ravni.

Primjer 4. Izračunati zapreminu paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a}=(3,4,-1), \quad \vec{b}=(-1,0,4), \quad \vec{c}=(1,3,2)$.

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}3 & 4 & -1\\ -1 & 0 & 4\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=-9, \qquad V_{paralelopipeda}=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|=|-9|=9$.

Primjer 5. Izračunati zapreminu tetraedra čija su tjemena *A(3,4,5), B(4,8,1), C(-1,2,2), D(-2,1,3)* i izračunati dužinu visine koja odgovara strani *ABC*.

$\overrightarrow{AB}=(1,4,-4), \quad \overrightarrow{AC}=(-4,-2,-3), \quad \overrightarrow{AD}=(-5,-3,-2)$;

$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}1 & 4 & -4\\ -4 & -2 & -3\\ -5 & -3 & -2\end{vmatrix}=15, \qquad \Rightarrow$

$V_{tetraedra}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{15}{6}$;

Zapremina tetraedra jednaka je trećini proizvoda baze i odgovarajuće visine. Otuda je:

$$V_{tetraedra}=\frac{P_{\Delta ABC}\cdot H_D}{3} \quad \Rightarrow \quad H_D=\frac{3\cdot V_{tetraedra}}{P_{\Delta ABC}};$$

Iz prethodnog poglavlja znamo da je:

$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|, \qquad \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -4\\ -4 & -2 & -3\end{vmatrix}=(-20,19,14)$, pa je

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{(-20)^2+19^2+14^2}=\frac{\sqrt{957}}{2}. \qquad H_D=\frac{3\cdot V_{tetraedra}}{P_{\Delta ABC}}=\frac{3\cdot\frac{15}{6}}{\frac{\sqrt{957}}{2}}=\frac{15}{\sqrt{957}}=\frac{5\sqrt{957}}{319}.$$

Primjer 6. Zapremina tetraedra je 5, a njena tri tjemena su tačke *A(2,1,-1)*, *B(3,0,1)* i *C(2,-1,3)*. Naći četvrto tjeme tetraedra ako je poznato da se ono nalazi na *Oy* osi.

Tjeme *D* tetraedra *ABCD* nalazi se na *Oy* osi, pa su njegove koordinate *D(0,k,0)*, $k\in R$, pa je $\overrightarrow{AB}=(1,-1,2)$, $\overrightarrow{AC}=(0,-2,4)$, $\overrightarrow{AD}=(-2,k-1,1)$.

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 4\\ -2 & k-1 & 1\end{vmatrix}=-4k+2,$$

$$V_{tetraedra}=\frac{1}{6}\cdot\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\cdot|-4k+2|,$$

S druge strane zapremina tetraedra je 5, pa iz prethodne jednakosti dobijamo

$$\frac{1}{6}\cdot|-4k+2|=5 \Rightarrow |-4k+2|=30\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4k+2=30 \ \vee\ -4k+2=-30 \ \Rightarrow k=-7\vee k=8.$$

Dakle, četvrto tjeme tetraedra *ABCD* je *D(0,-7,0)* ili *D(0,8,0)*.

Primjer 7. Tačke $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(1,5,0)$, $D(1,1,\lambda)$, $\lambda>0$ su tjemena tetraedra.

a) Odrediti vrijednost parametra λ tako da ivica AD bude uspravna na ravni određenoj tačkama *B, C* i *D*.

b) Za tako nađenu vrijednost parametra izračunati zapreminu tetraedra i vektor visine koja odgovara strani *ACD*.

a) Primijetimo da je $\overrightarrow{AD}=(-2,1,\lambda)$, $\overrightarrow{CD}=(0,-4,\lambda)$, $\overrightarrow{BD}=(1,-2,\lambda)$. Ivica *AD* je uspravna na ravni određenoj tačkama *B, C* i *D*, pa je

$$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{CD}\wedge\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BD} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}\wedge\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD} \ \Rightarrow \lambda^2=4\Rightarrow\lambda=\pm2.$$

Kako je $\lambda>0$ tražena vrijednost je $\lambda=2$.

b) $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(1,5,0)$, $D(1,1,2)$, pa je

$$\overrightarrow{AB}=(-3,3,0),\ \overrightarrow{AC}=(-2,5,0),\ \overrightarrow{AD}=(-2,1,2), \qquad (\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-3 & 3 & 0\\ -2 & 5 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=-18 \ \Rightarrow$$

$$V_{tetraedra}=\frac{1}{6}\cdot\left|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\cdot|-18|=3$$

Zapremina tetraedra jednaka je trećini proizvoda baze i odgovarajuće visine. Otuda je:

$$V_{tetraedra}=\frac{P_{\Delta ACD}\cdot H_B}{3} \ \Rightarrow\ H_B=\frac{3\cdot V_{tetraedra}}{P_{\Delta ACD}};$$

Iz prethodnog poglavlja znamo da je:

$$P_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right|, \qquad \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 5 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=(10,4,8), \text{ pa je}$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 4^2 + 8^2} = \frac{\sqrt{180}}{2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\,, \qquad H_B = \frac{3 \cdot V_{tetraedra}}{P_{\Delta ACD}} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}\,.$$

Jedinični vektor visine H_B je

$\overrightarrow{n_0} = \dfrac{\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right|} = \dfrac{(10,4,8)}{\sqrt{180}} = \left(\dfrac{5}{3\sqrt{5}}, \dfrac{2}{3\sqrt{5}}, \dfrac{4}{3\sqrt{5}}\right)$, pa je vektor tražene visine

$$\overrightarrow{H_B} = H_B \cdot \overrightarrow{n_0} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right) = \left(1, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$$